Die Borsuk-Vermutung

Alexander Möckel

16. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Borsuks Vermutung

Die Borsuk-Vermutung, von Karol Borsuk aus dem Jahre 1933, behandelt Zerlegungen und eine Mindestanzahl benötigter Teile. Diese Vermutung wurde damals im selben Artikel veröffentlicht wie der Borsuk-Ulam-Satz. Borsuks Vermutung lautet folgendermaßen.

> *„Kann jede Menge $S \subseteq \mathbb{R}^d$ von besckränktem, positivem Durchmesser in höchstens $d + 1$ Mengen von kleinerem Durchmesser zerlegt werden?“*

Das n-dimensionale Symplex liefert dabei die Schranke $d + 1$. Dies lässt sich bei Betrachtung des Symplex leicht feststellen.
Das Symplex besitzt spezielle Eigenschaften.

- Das n-dimensionale Symplex besitzt n+1 Ecken
- Der Abstand von 2 Ecken ist immer gleich
- Der Durchmesser eines Symplex ist der Abstand von 2 Ecken

Jedes Teil darf also höchstens einen Eckpunkt enthalten, denn würde es zwei enthalten so ist der Durchmesser des Teils gleich dem Durchmesser von S, würde also diesen nicht reduzieren. Es muss also mindestens n+1 Teile geben, für jede Ecke eins.
Die Borsuk-Vermutung ist speziell für Sphären, glatte Körper und $d \leq 3$ bewiesen worden.
60 Jahre später widerlegten Jeff Kahn und Gil Kalai Borsuks Vermutung allerdings für den allgemeinen Fall, sie zeigten damals folgendes für alle d ab einer Schranke

$$f(d) \geq (1.2)^{\sqrt{d}}$$

Im Folgenden wird eine Abwandlung des Beweises von Andrei M. Raigorodskii und Bernulf Weißbach abgehandelt, welche die Borsuk-Vermutung in $d = 861$ widerlegt.

1.2 Begriffserklärungen

Um den kommenden Beweis vollständig nachvollziehen zu können ist es notwendig ein paar Begriffe zu erklären

1.2.1 Durchmesser

Der Durchmesser bezeichnet das Supremum der Abstände zwischen zwei Punkten über alle Punkte aus der Menge.

1.2.2 fast-orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren x,y sind genau dann fast-orthogonal, wenn

$$|\langle x, y\rangle| = 2$$

1.3 Konventionen

In diesem Artikel werden einige Begriffe erscheinen, deren Bedeutung für diesen Beweis gesetzt wurde.

1.3.1 Die Funktion $f(d)$

$f(d)$ bezeichnet in diesem Artikel die kleinste Zahl, welche eine Durchmesser-reduzierende Zerlegung in $f(d)$ Teile von $S \subseteq \mathbb{R}^d$ erlaubt, wobei S einen positiven, beschränkten Durchmesser besitzt.

1.3.2 Die Mengen Q,R,S

Im Artikel werden folgende Mengen referenziert

- $Q = \{x \in \{+1, -1\}^n \,|\, x_1 = 1\,,\ \#\{i|x_i = -1\}\ ist\, gerade\,\}$
- $R = \{\, xx^T \,|\, x \in Q\}$
- $S = \{\, (xx^T)_{i>j} \,|\, xx^T \in R\}$
- $V = \{\sum_{\varepsilon_i \in \{0,1\}, i=1,\ldots,n} a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\varepsilon_n} {x_1}^{\varepsilon_1} {x_2}^{\varepsilon_2} \ldots {x_n}^{\varepsilon_n} \,|\, a_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\varepsilon_n} \in \mathbb{Q}\}$

Bemerkung: Die Elemente in R sind als Vektoren des $\mathbb{R}^{n^2}$ zu lesen und die Elemente in S sind als Vektoren des $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ zu lesen. Q', R', S' sind die Teilmengen von je Q,R,S, die, für Q', keine fast-orthogonalen Vektoren enthalten; für R' einen spitzen Winkel haben, also das Skalarprodukt gleich 4 ist; und für S', dass der Durchmesser kleiner als der von S ist.

1.3.3 Die Funktion $P(z)$

Im Folgenden gilt

$$P(z) = \binom{z-2}{p-2} = \frac{(z-2)(z-1)\ldots(z-(p-1))}{(p-2)(p-1)\ldots 1}$$

1.3.4 Die Funktionen $F_y(x)$ und $\overline{F_y}(x)$

Für diesen Artikel gilt:

$$\begin{aligned} F_y(x) &= P(\tfrac{1}{4}(\langle x,y\rangle + 2)) \\ \overline{F_y}(x) &= F_y(x) wobei x_1 = 1 und x_i^2 = 1 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die $\overline{F_y}(x)$ haben höchstens den Grad p-2, da sich alle Potenzen auf 1 oder 0 reduzieren lassen pro Faktor und es gibt p-2 Faktoren.

2 Satz über die Anzahl benötigter Teile

„Sei $p \in \mathbb{P}$, $n = 4p - 2$, $d = \binom{n}{2} = (4p-3)(2p-1)$. Dann gibt es eine Menge $S \subseteq \{+1,-1\}^d$ von 2^{n-2} Punkten im $\mathbb{R}^d$, so dass jede Zerlegung von S in Teile von kleinerem Durchmesser mindestens $\frac{2^{n-2}}{\sum_{i=0}^{p-2}\binom{n-1}{i}}$ Teile benötigt "

Nun wird dieser Satz über die Folgenden Kapitel bewiesen. Anschließend wird in Teil 3 dieser Satz angewendet um ein konkretes Gegenbeispiel zu erzeugen.

2.1 Anzahl Punkte in Q

Q enthält 2^{n-2} Punkte.

Beweis: Es handelt sich bei der Anzahl Elemente in $\{+1,-1\}^n$ um 2^n Vektoren, dies ergibt sich aus der Verteilung von jeweils +1 oder -1 auf die n Plätze. Aus der Kombinatorik ist bekannt, dass die Anzahl Möglichkeiten durch 2^n beschrieben wird. Nun ist der erste Punkt x_1 in Q fixiert, es wird durch diese Bedingung also nur noch auf n-1 Plätze verteilt; die Bedingung reduziert die Anzahl Möglichkeiten auf nur noch 2^{n-1} Vektoren. Um die letzte Bedingung einzubeziehen ist ein Blick auf das Pascalsche Dreieck notwendig.

$$\binom{n-2}{0}\binom{n-2}{1}\binom{n-2}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-2}{4}\binom{n-2}{5}\dots$$

$$\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\binom{n-1}{3}\binom{n-2}{4}\binom{n-2}{5}\binom{n-2}{6}\dots$$

Hier lässt sich $\binom{n-1}{i}$ als Anzahl Vektoren in Q mit {-1} in i Komponenten identifizieren. Aus Q ist bekannt, dass nur Vektoren mit einer geraden Anzahl an {-1} Komponenten tatsächlich in Q sind, können die Anzahl der

Vektoren in Q also auf die Summe über die $\binom{n-1}{i}$, wobei i gerade ist, reduzieren.

$$\binom{n-2}{0}\binom{n-2}{1}\binom{n-2}{2}\binom{n-2}{3}\binom{n-2}{4}\binom{n-2}{5}\cdots$$

$$\underline{\binom{n-1}{0}}\binom{n-1}{1}\underline{\binom{n-1}{2}}\binom{n-1}{3}\underline{\binom{n-2}{4}}\binom{n-2}{5}\underline{\binom{n-2}{6}}\cdots$$

Aus $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ ergibt sich, dass die Summe über alle $\binom{n-1}{i}$, wobei i gerade ist, der Summe aller $\binom{n-2}{i}$ über alle i entspricht. Anschaulich im Pascalschen Dreieck bedeutet das, dass jeder Eintrag die Summe der beiden darüberstehenden Einträge ist. Es gilt:

$$|Q| = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2k} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = 2^{n-2}$$

2.2 Kongruenzaussage für Punkte aus Q

Es gilt $\langle x, y \rangle \equiv 2 \pmod 4$, $\forall x, y \in Q$

Beweis: Zuerst wird gezeigt, dass die Anzahl der Komponenten, in welchen sich zwei Vektoren aus Q unterscheiden, immer gerade sein muss. Dazu wird folgendes betrachtet:

$$n = a_{1,1} + a_{1,-1} + a_{-1,1} + a_{-1,-1}$$

Hierbei steht $a_{i,j}$ für die Anzahl an Komponenten, welche in x in einer Komponente den Wert i haben und in der selben Komponente in y den Wert j haben. Ihre Summe ist offensichtlich die Anzahl der Komponenten eines Vektors aus Q, also n. Es ist schon folgendes für Vektoren aus Q bekannt:

$$a_{1,-1} + a_{-1,-1} = 2k\,,\ k \in \mathbb{N}$$
$$a_{-1,1} + a_{-1,-1} = 2m\,,\ m \in \mathbb{N}$$

Dies ist bekannt, da die Anzahl an Komponenten für Vektoren aus Q, die den Wert {-1} haben, immer gerade ist. Dann gilt auch:

$$a_{-1,1} + a_{1,-1} = 2k + 2m - 2a_{-1,-1} = 2(k + m - a_{-1,-1})$$

Also ist die Anzahl sich unterscheidender Komponenten immer gerade.
Dies liefert neue Erkenntnis:

$$\langle x, y \rangle = (4p - 2) - 2(a_{-1,1} + a_{1,-1})$$

Hierbei entsteht der Faktor 2 durch die Differenz zwischen 1 und -1. (4p-2) bezeichnet den maximalen Wert des Skalarprodukts, welcher entsteht wenn jeder Eintrag gleich wäre. Für jede Komponente die sich zwischen x und y unterscheiden entsteht also eine Differenz von 2. Weitere Ausführung führt zu:

$$\langle x, y \rangle = (4p - 2) - 4(k + m - a_{-1,-1}) \equiv 2 \pmod 4$$

2.3 Aussage für Teilmengen von Q ohne fast orthogonale Vektoren

Für $Q' \subseteq Q$, wobei Q' keine fast-orthogonalen Vektoren enthält, gilt:

$$|Q'| \leq \sum_{i=0}^{p-2} \binom{n-1}{i}$$

Um dies zu zeigen werden erst einige andere Aussagen bewiesen.

2.3.1 Lemma zur Funktion P(z)

„Die Funktion P(z) ist ein Polynom vom Grad p-2. Es liefert ganzzahlige Werte für alle ganzzahligen z. Die ganze Zahl P(z) ist dann und nur dann nicht durch p teilbar, wenn z modulo p zu 0 oder 1 kongruent ist.“

Beweis: P(z) liefert ganzzahlige Werte für alle ganzzahligen z, da die Funktion durch den Binomialkoeffizienten gebildet wird. P(z) ist ein Polynom vom Grad p-2, da es p-2 Faktoren gibt, die jeweils p einmal enthalten.
Der Nenner von P(z) hat nicht p als Faktor, da keiner der Faktoren des Nenner selbst p als Faktor hat. Da alle Faktoren kleiner als p sind kann also der Nenner nicht den Teiler p haben.
Für den Zähler ist eine Fallunterscheidung notwendig.
Ist z modulo p zu 0 kongruent, so bekommt man dieselben Restklassen wie im Nenner, erhält also auch nicht den Faktor p, dann ist auch P(z) nicht durch p teilbar.
Ist z modulo p zu 1 kongruent, so verschieben sich die Restklassen im Vergleich zum Nenner um je eine Restklasse nach oben, anstatt der Restklassen [1] bis [p-2] erhält man die Restklassen [2] bis [p-1]. Allerdings enthalten dann die Faktoren auch nicht selbst den Faktor p. Dann ist auch P(z) nicht durch

p teilbar.
Ist z modulo p nicht kongruent zu 0 oder 1 so entsteht in einem Faktor des Zählers die Restklasse [0]. Dieser Faktor ist also ein Vielfaches von p besitzt also den Faktor, dann besitzt auch P(z) den Faktor und ist damit durch p teilbar.

2.3.2 Beschränkung von $\langle x, y \rangle$

Es gilt:

$$-(p-2) \;\leq\; \tfrac{1}{4}(\langle x, y \rangle + 2) \;\leq\; p-1\,,\ \forall x, y \in Q\,,\ x \neq y$$

Beweis: Es gilt:

$$-(4p-2) \;\leq\; \langle x, y \rangle \;\leq\; 4p-2\,,\ \forall x, y \in Q$$

Diese Beschränkung entsteht, da das Skalarprodukt in jeder Komponente entweder um 1 addiert oder um 1 subtrahiert. Die untere Grenze geht davon aus, dass sich x und y in jeder Komponente unterscheiden, die obere geht davon aus, dass sie in jeder Komponente gleich sind. Dies kann noch auf echt kleiner und größer beschränkt werden. Da im Problem $x \neq y\,,\ x_1 = y_1 = 1$ und da die Anzahl unterschiedlicher Komponenten immer gerade sein muss, ergibt sich:

$$-(4p-6) \;\leq\; \langle x, y \rangle \;\leq\; 4p-6\,,\ \forall x, y \in Q\,,\ x \neq y$$

Umformung gibt:

$$-(p-2) \;\leq\; \tfrac{1}{4}(\langle x, y \rangle + 2) \;\leq\; p-1\,,\ \forall x, y \in Q\,,\ x \neq y$$

Bemerkung: $\frac{1}{4}(\langle x, y \rangle + 2)$ ist eine ganze Zahl nach Kapitel 2.2

2.3.3 Teilbarkeit von $F_y(x)$

$F_y(x)$ ist genau dann durch p teilbar, wenn $x \neq y\,,\ \forall x, y \in Q'$

Beweis: Für $x = y$ ergibt sich $F_y(y) = 1$, ist also nicht durch p teilbar.
Damit $F_y(x)$ durch p teilbar ist darf nach Kapitel 2.3.1 $\frac{1}{4}(\langle x, y \rangle + 2)$ (mod p) nicht kongruent zu 0 oder 1 sein. Durch die Beschränkung aus Kapitel 2.3.2 geschieht dies nur bei Gleichheit zu 0 oder 1, da andere Elemente der Restklassen außerhalb der Beschränkung liegen.

$$\tfrac{1}{4}(\langle x, y \rangle + 2) = 0 \leftrightarrow \langle x, y \rangle = -2 \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{4}(\langle x, y \rangle + 2) = 1 \leftrightarrow \langle x, y \rangle = 2$$

Dann wären x und y aber fast-orthogonal was der Eigenschaft von Q' widerspricht.

2.3.4 Lineare Unabhängigkeit von $\overline{F_y}(x)$ über $\mathbb{Q}$

Die $\overline{F_y}(x)$ sind über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig.

Beweis: durch Widerspruchsannahme. Angenommen es gäbe eine Linearkombination mit rationalen Koeffizienten welche nicht alle verschwinden, so dass:

$$\textstyle\sum_{y\in Q'} \alpha_y \overline{F_y}(x) = 0$$

Trennen von $\alpha_x \overline{F_x}(x)$ von der Summe liefert neue Erkenntnisse:

$$\textstyle\sum_{y\in Q'\setminus x} \alpha_y \overline{F_y}(x) \, + \, \alpha_x \overline{F_x}(x) = 0$$

Für alle Elemente aus dieser Summe ist $\overline{F_y}(x)$ durch p teilbar, da $x \neq y$ gilt, also auch die Summe selbst. Der ausgesonderte Summand muss nun auch den Teiler p besitzen damit die Gleichung aufgeht. Da $\overline{F_x}(x)$ nicht durch p teilbar ist, muss also α_x durch p teilbar sein.
Da x variabel ist, kann dies für jedes $y \in Q'$ durchgeführt werden, es darf angenommen werden, dass alle Koeffizienten den Teiler p besitzen also auch die gesamte Linearkombination selbst.
In

$$\textstyle\sum_{y\in Q'\setminus x} \alpha_y \overline{F_y}(x) \; = \; -\alpha_x \overline{F_x}(x)$$

besitzt der linke Teil der Gleichung also den Faktor p^2, der rechte Teil allerdings nur den Faktor p. Offenbar müssen alle Koeffizienten verschwinden, damit diese Gleichung stimmt.

2.3.5 Beschränkung von $|Q'|$

Es gilt:

$$|Q'| \; \leq \; \textstyle\sum_{i=0}^{p-2} \binom{n-1}{i}$$

Beweis: Es ist bekannt, dass die Anzahl der Monome in einem $\overline{F_y}(x)$ durch den Grad $p-2$ beschränkt ist, wobei die Potenzen maximal den Grad 1 haben können. Wenn

$$\{\, \overline{F_y}(x) \,|\, y \in Q' \}$$

den von den $\overline{F_y}(x)$ erzeugten Raum mit Dimension $|Q'|$ bezeichnet, ergibt sich folgende Abhängigkeit

$$\{\,\overline{F_y}(x)\,|\,y \in Q'\} \;\subseteq\; \{f \in V\,|\,Grad(f) \leq p-2\}$$

Die Dimension von $\{f \in V\,|\,Grad(f) \leq p-2\}$ ist gegeben durch alle möglichen Monome mit höchster Potenz 1 und Grad von höchstens p-2. Die Dimension wird also durch $\sum_{i=0}^{p-2}\binom{n-1}{i}$ beschrieben und schränkt damit $|Q'|$ auch ein.

2.4 Aussage über Abstand von Punkten in S

Der Abstand von 2 Punkten in S wird maximal, wenn die dazugehörigen Punkte in Q fast-orthogonal sind.

Beweis: Es gibt Bijektionen zwischen Q,R und S, da die Matrix $xx^T \in R$ als erste Spalte vollständig $x \in Q$ enthält und S diese Spalte auch vollständig übernimmt.
Berechnung des Skalarproduktes der Elemente in R, wobei die Elemente von R als x_ix_j zu sehen sind, gibt:

$$\begin{aligned}
\langle xx^T, yy^T\rangle &= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_ix_j)(y_iy_j) \\
&= (\textstyle\sum_{i=1}^n x_iy_i)(\sum_{j=1}^n x_jy_j) \\
&= (\langle x,y\rangle)(\langle x,y\rangle) \\
&= \langle x,y\rangle^2 \\
&\geq 4
\end{aligned}$$

Gleichung, wenn $|\langle x,y\rangle| = 2$, also wenn x,y fast-orthogonal sind. Da xx^T symmetrisch ist und auf der Spur immer 1 steht gilt:

$$\begin{aligned}
4 \leq \langle xx^T, yy^T\rangle &= \langle (xx^T)_{i<j}, (yy^T)_{i<j}\rangle + \langle (xx^T)_{i>j}, (yy^T)_{i>j}\rangle + n \\
&= 2\langle (xx^T)_{i>j}, (yy^T)_{i>j}\rangle + n
\end{aligned}$$

Umformung gibt:

$$\langle (xx^T)_{i>j}, (yy^T)_{i>j}\rangle \;\geq\; -\tfrac{n}{2} + 2$$

Mit Gleichung für x,y fast-orthogonal.

Die Länge jedes Vektoren in S ist gleich, anschaulich lässt sich dies dadurch erklären, dass die Punkte Elemente von $\{+1,-1\}^d$ sind, welche selbst Punkte

auf einer gemeinsamen Sphäre sind.
Für den Abstand zweier Vektoren $A, B \in S$ gilt:

$$\begin{aligned} ||A-B||_2 &= \sqrt{\langle (A-B),(A-B)\rangle} \\ &= \sqrt{\langle A,A\rangle + \langle B,B\rangle - 2\langle A,B\rangle} \end{aligned}$$

Da $\langle A,A\rangle$ und $\langle B,B\rangle$ durch die immer gleiche Länge der Vektoren unabhängig von je A und B ist wird der Abstand zwischen A und B maximal wenn $\langle A,B\rangle$ minimal wird. Aus obiger Überlegung geschieht das genau dann, wenn die zugehörigen Punkte aus Q fast-orthogonal sind. Das bedeutet dann auch, dass eine Teilmenge S', die einen kleineren Durchmesser hat als S bijektiv zu Q' und R' ist, also auch speziell die selbe Anzahl Elemente enthält wie Q' und R'. S' ist also auch beschränkt wie Q', heißt dass jede Zerlegung von S, die den Durchmesser in jedem Teil verkleinert, mindestens $\frac{2^{n-2}}{\sum_{i=0}^{p-2}\binom{n-1}{i}}$ Teile benötigt.
Der Satz aus Teil 2 ist damit bewiesen.

3 Konkretes Gegenbeispiel

Sei $p = 11$, $n = 42$ und $d = \binom{42}{2} = 861$. Des Weiteren:

$$2320.96 \approx \frac{2^{40}}{\sum_{i=0}^{9}\binom{41}{i}} > d+1 = 862$$

Dies ist also ein Gegenbeispiel zur Borsuk-Vermutung, es werden in Dimension d=861 zumindest 2321 Teile benötigt um eine Durchmesser-reduzierende Zerlegung zu finden.

4 Literatur

M. Aigner, G. M. Ziegler, Das Buch der Beweise. SPringer, 5. Auflage (S. 135-141)